A Matemática da Independência Financeira

http://drnickel.wordpress.com

2 de novembro de 2013

1 O que é Independência Financeira?

Alcançar a **Independência Financeira** é o objetivo de muitas pessoas, porém este termo pode ter significados muito diferentes, dependendo das expectativas, estilo e objetivo de vida de cada um. Alguns imaginam uma vida luxuosa envolvendo viagens ao redor do mundo, enquanto outros idealizam uma vida mais frugal, na qual, sem a pressão financeira de trabalhar pelo dinheiro, podem se dedicar a outras atividades que sempre despertaram interesse.

Podemos definir o conceito de independência financeira da seguinte maneira:

> ***Independência Financeira*** *é a geração passiva de renda, por meio de investimentos, suficiente para cobrir todos os gastos de uma pessoa ou família.*

Um conceito relacionado é a aposentadoria. Apesar de ambos os termos denotarem uma situação na qual a pessoa deixou de trabalhar para obter renda, uma interpretação mais flexível é "uma situação na qual não se precisa mais trabalhar". Esta interpretação deixa implícita a possibilidade de se ter uma ocupação ou atividade que gere satisfação pessoal, independentemente da remuneração.

O esforço necessário para alcançar a independência financeira (que abreviaremos como IF daqui para frente) depende do tipo de gastos que se pretende ter no futuro. Alguém que planeje ter no futuro um estilo de vida acima do atual precisa se preparar para despender um esforço maior para alcançar sua

IF, seja poupando mais, seja trabalhando por um período maior. O oposto vale para alguém que pretenda, no futuro, ter um estilo de vida mais frugal. Chamaremos o período no qual se está trabalhando para alcançar a IF de *período de acumulação*, e de *período de retirada* ou de *consumo* o período no qual esta renda acumulada será consumida,

Os principais fatores que determinam o esforço necessário para alcançar a IF são:

Fatores que influenciam na Independência Financeira

- **Patrimônio líquido atual** - definido como o total dos ativos (dinheiro, investimentos, imóveis etc), menos o total dos passivos (dívidas, financiamentos etc).
- **Taxa de poupança** - é proporção da renda economizada, ou seja, a porcentagem da renda total que não é consumida durante o período de acumulação.
- **Gastos futuros** - é o valor que será gasto no período de consumo. Pode ser definido de forma nominal (por exemplo, retirada mensal de R$10.000) ou como proporção do valor total acumulado (por exemplo, uma *taxa de retirada* anual de 4% do patrimônio líquido).
- **Taxa de retorno** - é o rendimento, em termos percentuais, dos investimentos realizados. Podemos distinguir entre a taxa de retorno *nominal*, que é calculada antes de levar em consideração impostos, inflação e outros custos, e a taxa de retorno *real*, que subtrai da taxa nominal estes valores.
- **Taxa de inflação** - A taxa de inflação, que mede o aumento dos preços na economia.
- **Duração do período de acumulação** - é o número de anos que a pessoa pretende trabalhar para acumular riqueza.

Podemos separar os fatores acima dependendo de que tipo de controle podemos exercer sobre eles. Sobre alguns dos fatores não podemos exercer qualquer influência, seja porque eles dependem do contexto e do passado de cada um (ex: patrimônio atual), ou porque dependem do cenário economico futuro (ex: inflação). Sobre outros fatores temos uma influência parcial, que pode ser maior ou menor, dependendo do nosso comportamento e das nossas escolhas. Por exemplo, não podemos saber com certeza absoluta quanto pouparemos durante o período de acumulação devido a gastos imprevistos, porém podemos sempre nos adaptar a situações inesperadas, fazendo mudanças no nosso padrão de consumo para ficar dentro de um orçamento desejado. O mesmo raciocínio se aplica aos gastos no período de IF. Um outro exemplo de fator sobre o qual temos alguma influência, porém não total, é a taxa de retorno dos investimentos. Não temos como garantir que o mercado de ações, por exemplo, vai ter um rendimento desejado no futuro, porém podemos escolher que proporção de nosso patrimônio iremos alocar para o mercado de ações, renda fixa, investimentos imobiliários e assim por diante.

Agora que definimos o que é IF, quais as principais variáveis que influenciam nossa capacidade de atingi-la, e que tipo de influência temos sobre estas variáveis, vamos analisar como estas variáveis se relacionam matematicamente, e a importância dos juros compostos no processo como um todo. A argumentação matemática e alguns dos exemplos são baseados em Fisker (2010). Um outro recurso interessante é o blog `http://www.mrmoneymustache.com/`.

2 Gastos Necessários, Supérfluos e Poupança

Vamos começar ignorando a existência de juros e inflação, e consideraremos o tipo mais básico de IF: um fundo de emergência para sobreviver a um período em que deixamos de ter renda, por exemplo devido a perda de emprego. Vamos supor que este período tenha uma duração de 6 meses.

Como um primeiro exemplo, consideremos uma pessoa que gasta 90% da sua renda mensal, poupando os 10% restantes. Vamos supor ainda que dos 90% consumidos, 60% são gastos necessários e 30% são gastos supérfluos. Como ela economiza 10% da sua renda, e tem gastos necessários de 60% da renda, esta pessoa precisa trabalhar 6 meses para acumular o suficiente para viver 1 mês sem renda. Portanto para sobreviver a um período de 6 meses sem renda, esta pessoa precisaria trabalhar durante 36 meses.

Vamos considerar um outro exemplo, com a mesma taxa de poupança (10%), porém com gastos necessários de apenas 20% da renda e supérfluos de 70%. Neste caso, levaria apenas 2 meses para poupar o suficiente para financiar 1 mês sem renda. Logo para financiar um fundo de emergência de 6 meses, é preciso trabalhar apenas 12 meses.

Finalmente, imaginemos uma pessoa que poupa 20% da renda e possui gastos necessários de 20% e supérfluos de 60%. Neste caso, a cada mês trabalhado a pessoa acumula o suficiente para viver 1 mês sem renda, e portanto demoraria 6 meses para constituir seu fundo de emergência.

Os exemplos acima permitem tirar duas conclusões. A primeira é que, quanto maior a taxa de poupança, mais protegidos estamos de eventuais percalços, como por exemplo a perda do emprego. A segunda é que, quanto maior forem os gastos supérfluos com relação aos necessários, mais seguros estamos, pois podemos limitar os gastos supérfluos para viver durante um período de emergência.

O foco destes exemplos foi no curto prazo, onde o objetivo é financiar um período curto sem renda, como por exemplo o tempo que levaria para se encontrar um novo emprego. É relativamente simples limitar o consumo aos gastos necessários durante curtos períodos. Mas o que acontece se quisermos acumular o suficiente para cobrir todos os gastos (necessários e supérfluos)?

Se a taxa de poupança for de 10%, então é preciso trabalhar por 9 períodos para financiar um período sem trabalhar. Por exemplo, suponha que a renda anual de uma pessoa é de R$ 100.000. Com uma taxa de poupança de 10% por ano, esta pessoa levaria 9 anos para acumular o suficiente para viver um ano sem trabalhar, já que acumularia R$10.000 por ano e tem um custo anual de R$90.000. Já com uma taxa de poupança de 20%, esta pessoa precisaria de apenas 4 anos (R$80.000 dividido por R$20.000). A Tabela 2 apresenta esta relação para diversos valores da taxa de poupança. Note que a escala de tempo é irrelevante; o que funciona em número de anos funcionaria igualmente em número de meses. Por exemplo, com uma taxa de poupança de 70% (e horários muito flexíveis!), a cada 0,4 mês trabalhado (ou 8,4 dias), pode-se tirar um mês de "folga".

3 Influência dos Juros

Até agora ignoramos o fato de que o valor do dinheiro muda ao longo do tempo. Isto ocorre devido a diversos fatores, como por exemplo a inflação, a ação dos bancos centrais e dos grandes agentes econômicos, e assim por diante. Geralmente a mudança no valor do dinheiro ao longo do tempo é medida na forma de juros. Quando financiamos um bem de consumo - por

Tabela 1: Número de anos para financiar um ano sem trabalhar

Taxa de poupança	**Número de anos de trabalho necessários para ficar um ano sem trabalhar**
1%	99.00
5%	19.00
10%	9.00
15%	5.67
20%	4.00
25%	3.00
30%	2.33
35%	1.86
40%	1.50
45%	1.22
50%	1.00
55%	0.82
60%	0.67
65%	0.54
70%	0.43
75%	0.33
80%	0.25
85%	0.18
90%	0.11

exemplo, um carro novo - estamos utilizando dinheiro que hoje não possuímos para antecipar um consumo que, de outra forma, só ocorreria no futuro. Para fazer isto, é preciso tomar o dinheiro emprestado, tipicamente de um banco, que cobrará uma taxa de juros em cima do montante emprestado. Esta taxa de juros reflete não somente o custo de oportunidade do dinheiro (o banco poderia, por exemplo, investir o dinheiro em títulos do governo, com risco quase zero) como também o risco que o banco corre de que nós não iremos repagar a dívida.

Quando temos uma dívida, os juros trabalham contra nós, enquanto quando temos investimentos, os juros trabalham ao nosso favor, na forma de retorno sobre os investimentos. Vimos há pouco que alguém que poupa 10% da sua renda precisa trabalhar 9 anos para financiar 1 ano sem trabalhar. Este cálculo ignorou o efeito dos juros, como se a pessoa guardasse o dinheiro embaixo do colchão (e a inflação fosse zero). É intuitivo que, se investirmos os recursos poupados a uma taxa de retorno acima da inflação, precisaremos de menos de 9 anos para alcançar o mesmo resultado. Analogamente, se acumularmos um fundo suficiente para financiar, por exemplo, 9 anos sem trabalhar, ele durará mais do que 9 anos devido aos rendimentos acumulados. Iremos a seguir quantificar estes efeitos.

Após ler esta seção, ficará clara a importância dos juros (taxa de retorno) na IF. Em particular, o leitor interessado em alcançar a IF concluirá que, salvo raras exceções, não deve em hipótese alguma possuir dívidas, a não ser que seja financeiramente vantajoso fazê-lo. Um exemplo disto é uma compra de um imóvel no qual se irá morar, caso o custo mensal seja inferior ao do aluguel. Caso o leitor possua dívidas, sua prioridade máxima deve ser eliminar as dívidas existentes, para então passar a acumular e investir seu dinheiro.

3.1 Juros Compostos

Vamos começar entendendo os conceitos básicos de juros compostos. O leitor acostumado com o conceito pode pular esta seção. Os juros compostos são calculados não apenas sobre um valor inicial, mas também sobre os juros passados. Suponha que você aplique R\$100.000 em um investimento que rende uma taxa de juros de 1% ao mês. Ao final do primeiro mês, o valor do investimento será de R\$101.000, correspondentes aos R\$100.000 originais, mais os juros de 1% em cima deste valor. Ao final do segundo mês, o rendimento de 1% será aplicado em cima de R\$101.000, o que dará um valor de R\$102.010. Este saldo reflete os R\$100.000 originais, mais os R\$1.000 de juros do primeiro mês, mais R\$1.010 de juros do segundo mês, R\$10 dos quais são juros sobre os juros do primeiro mês . No terceiro mês o valor será R\$103.030,10, e assim por diante.

Podemos calcular o valor do investimento no futuro de uma maneira relativamente simples. Vamos denotar por P_k o valor do investimento após k meses e por j a taxa de juros. Então temos que o valor do investimento ao final do primeiro mês é dado por:

$$P_1 = P_0 + (P_0 \times j) = P_0 \times (1 + j)$$

Ao final do segundo mês, temos:

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 + (P_1 \times j) \\ &= P_0 \times (1 + j) \times (1 + j) = P_0 \times (1 + j)^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Se levarmos este raciocínio adiante, veremos que após um número qualquer N de meses, o valor do investimento é de

$$P_N = P_0 \times (1 + j)^N$$

No exemplo acima, começamos com um investimento de R\$100.000, ou seja, $P_0 = 100000$, e a taxa de juros é $j = 1\% = 0,01$. Então o valor do investimento ao final de um ano seria $P_{12} = 100.000 \times (1.01)^{12} = R\$112.682,50$. Note que, se os juros fossem simples, ou seja, somente sobre o valor inicial investido, teríamos ao final do ano um valor de R\$ 112.000. Ou seja, o fato de os juros serem compostos gerou um valor adicional de R\$682,50 ao longo de um ano.

No exemplo acima, a taxa de juros anual é de 12,68%, ou seja, após um ano nosso capital foi multiplicado por um fator de 1,1268. Se utilizarmos a fórmula acima variando o número de períodos, podemos verificar o impacto dos juros ao longo do tempo. A tabela 3.1 apresenta o fator de acumulação com uma taxa de juros compostos de 1% ao mês para diferentes períodos. Vemos por exemplo que R\$1 torna-se R\$3.30 após 10 anos.

Considerando o objetivo de alcançar a IF, economizar mais hoje tem um efeito duplamente benéfico: cada R\$1 adicional que deixamos de gastar hoje nos proporcionará R\$3,30 daqui a 10 anos. Este exemplo também é ilustrativo de que devemos evitar ao máximo contrair dívidas. Um carro financiado por 5 anos a uma taxa de 1% ao mês (a qual não está muito longe da realidade) terá custado, ao final do período, praticamente o equivalente a dois carros, sem contar a depreciação[1].

Tabela 2: Efeito acumulado de juros compostos de 1% ao mês

Número de anos	**Fator de acumulação**
1	1.1268
2	1.2697
3	1.4308
4	1.6122
5	1.8167
10	3.3004
20	10.8926

3.2 Aportes de capital e o efeito *Latte*

O exemplo acima considera que nunca existe aporte de capital. Na realidade, vamos poupar parte da nossa renda e investi-la a cada mês. Como podemos calcular o valor acumulado neste caso?

Vamos supor que começaremos um investimento hoje (mês 1) com um valor inicial $P_1 = A$ reais, depositando a cada mês uma quantia fixa adicional de A reais. A taxa de juros mensal é denotada por j. Daqui a um mês, os A reais iniciais terão rendido juros e depositaremos mais A reais, logo o saldo será

$$P_2 = A(1 + j) + A$$

No final do mês 3, o saldo do mês anterior, P_2, terá rendido juros, e depositaremos mais A reais, logo o saldo será:

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2(1 + j) + A \\ &= (A(1 + j) + A)(1 + j) + A \\ &= A(1 + j)^2 + A(1 + j) + A \end{aligned}$$

[1]Se o financiamento fosse pago apenas no final do período de 5 anos.

Seguindo este raciocínio, podemos mostrar que o saldo do investimento daqui a N meses será dado por[2].

$$P_N = A\left[\frac{(1+j)^N - 1}{j}\right] \tag{2}$$

Vejamos um exemplo. Se o aporte mensal A for igual R$ 1.000 e a taxa de juros for $j = 0,50\%$ (aproximadamente o rendimento mensal da poupança), então após 12 meses o valor acumulado será

$$P_{12} = 1000\left[\frac{(1.005)^{12} - 1}{0.005}\right] = R\$12.565,57$$

Note que a fórmula 2 funciona para diferentes horizontes de tempo. Basta substituir a taxa de juros e o número de períodos pelos valores adequados.

A fórmula 2 é útil não somente para calcular o valor acumulado de um investimento, mas também para determinar o valor que se poderia acumular ao eliminar ou reduzir gastos periódicos. É o chamado "efeito *latte*": suponha que um café no Starbucks custe R$7, e que você tenha o hábito de tomar 3 cafés por semana (R$21). Logo o valor gasto mensalmente será mais ou menos R$84. Porém, se este gasto fosse eliminado e o dinheiro aplicado a uma taxa de retorno de 10% ao ano (equivalente a 0,83% ao mês), o custo ao longo de 10 anos, por exemplo, seria de R$ 17.206,98[3]. Deste total, R$10.080 foram gastos em café, enquanto que os R$7126 restantes representam juros. Isto demonstra um fenômeno interessante: qualquer consumo no presente tem um custo visível imediatamente, porém também tem um custo invísivel, sobre o qual não costumamos pensar: o rendimento que potencialmente deixaremos de ganhar. O *custo real* de alguma coisa é a soma dos dois.

O exemplo acima pode até parecer frívolo, porém se considerarmos o efeito acumulativo de diversos gastos pequenos (assinatura de revistas que não lemos, canais "premium" de TV a cabo a que não assistimos, aquela casa de veraneio que usamos uma vez por ano etc), ficaremos surpresos com o efeito nocivo que eles podem ter na acumulação de riqueza e, consequentemente, na IF.

É conveniente fazer os cálculos acima para um valor unitário (R$1), o que permite facilmente calcular o custo real de uma despesa recorrente qualquer

[2]Esta fórmula é derivada no Apêndice.

[3]Basta utilizar a fórmula 2 com $A = 84, j = 0,008333$ e $N = 120$.

ao longo do tempo, bastando multiplicar o valor da despesa pelo fator correspondente. Vamos assumir, por exemplo, uma taxa de retorno de 10% ao ano. Utilizando a fórmula 2 com $A = 1$ e $j = 0,008333$, e variando o número de anos, obtemos os resultados da Tabela 3.2. Para calcular o custo real de um despesa mensal qualquer, basta multiplicar o valor mensal pelo fator da tabela.

Exemplo 1 Uma família possui um carro e está considerando comprar um segundo carro. Suponha que o custo mensal, incluindo IPVA, seguro, combustível, estacionamento, manutenção etc, corresponda a R$800 por mês. Então o custo real de manter um segundo carro ao longo de 10 anos (sem considerar a depreciação e o custo de oportunidade!) seria de R$ 163.880 (R$800 $\times$ 204,85).

Tabela 3: Custo real de uma despesa mensal de R$1 por mês a uma taxa de juros de 10% ao ano

Anos	**Meses**	**Custo real**
1	12	12,57
5	60	77,44
10	120	204,85
20	240	759,37
40	480	6324,08

4 Mensurando independência financeira

A Tabela 2 apresentou um cálculo muito simples do número de anos de trabalho necessário para financiar um ano de IF, desconsiderando o efeito do retorno sobre os investimentos. Por exemplo, uma pessoa que economiza 65% do que ganha precisaria trabalhar aproximadamente 5,4 anos para financiar um período de 10 anos sem trabalhar. Na realidade, investiremos o dinheiro poupado e logo é intuitivo que o fundo durará mais do que 10 anos. A uma taxa de retorno de 10% ao ano, por exemplo, o fundo durará 25,16 anos. Podemos inverter o raciocínio: para acumular um fundo de 10 anos, levando em consideração o retorno sobre os investimentos, levaremos menos tempo do que o calculado na Tabela 2. O objetivo desta seção é responder a perguntas como:

- Quanto restará em um fundo de R$ 1.500.000, com uma retirada anual de R$75.000, após 5 anos?
- Quantos anos é preciso trabalhar para acumular um fundo suficiente para cobrir as despesas por um período de 40 anos?

Vamos começar assumindo que já passamos pelo período de acumulação e acumulamos um fundo de tamanho P_0. A partir deste momento, passaremos a consumir este fundo, retirando no início de cada período um valor p. O restante do fundo rende juros j até o próximo período, quando um valor adicional p é retirado. Qual o valor que restará no fundo após N períodos, ou seja, qual o valor de P_N? A resposta é dada pela seguinte fórmula[4]:

$$P_N = P_0(1+j)^N - p\left[\frac{(1+j)^{N+1} - (1+j)}{j}\right] \tag{3}$$

A fórmula acima pode ser utilizada para determinar o valor restante em um fundo após N períodos. Note que ela funciona para qualquer período que escolhermos (mensal, anual etc), desde que ajustemos as variáveis para a frequência adequada, além de poder ser utilizada tanto com valores nominais (por exemplo $P_0 = R\$500.000$) como em número de períodos (por exemplo, $P_0 = 10$ anos). Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2 Uma pessoa acumulou um fundo de R$500.000, investido a uma taxa anual de retorno de 6%. Se o custo anual for de R$50.000, quanto dinheiro restará no fundo após 5 anos?

Aplicando a fórmula, temos

$$P_5 = 500.000 \times 1,06^5 - 50.000 \times \left[\frac{1,06^6 - 1,06}{0,06}\right] = R\$370.346,86$$

[4] A derivação desta fórmula é feita no Apêndice.

Exemplo 3 Uma pessoa acumulou um fundo equivalente a 10 vezes a sua despesa anual. Se a taxa anual de retorno for de 6%, quanto restará no fundo após 5 anos?

Aplicando a fórmula com $P_0 = 10$ anos, $p = 1$ ano, temos

$$P_5 = 10 \times 1,06^5 - 1 \times \left[\frac{1,06^6 - 1,06}{0,06}\right] = 7,41 \text{ anos}$$

Note que, no segundo exemplo, o valor está dado em anos de despesa. Se a despesa anual for de $R\$50.000$, o valor no fundo será de $7,41 \times 50.000 = R\$370.346,86$, o mesmo valor do Exemplo 2.

Podemos utilizar a fórmula 3 para calcular o número de anos que um fundo irá sobreviver, de acordo com o seu tamanho inicial, a taxa de retorno e o valor da retirada. Para fazer isto, precisamos descobrir qual o valor de N para que o fundo seja totalmente consumido, ou seja, precisamos encontrar N tal que $P_N = 0$. O resultado é:

$$N = \frac{\log\left(p(1+j)\right) - \log\left(p(1+j) - P_0 j\right)}{\log\left(1+j\right)} \tag{4}$$

A fórmula 4 é importantíssima no contexto da IF, pois ela nos diz quanto tempo conseguiremos sobreviver com um fundo de determinado tamanho. Por exemplo, se acumularmos um fundo equivalente a 10 vezes a nossa despesa anual ($P_0 = 10$ anos, $p = 1$ ano) e a taxa de retorno for de 4%, o fundo irá durar 13,25 anos, ou seja, 3,25 a mais do que caso não investíssemos o dinheiro. Por outro lado, se dobrarmos o tamanho do fundo ($P_0 = 20$ anos), então levará 37,38 anos para o fundo se extinguir[5]. Isto é interessantíssimo, pois vemos que a relação entre o tamanho do fundo e sua duração não é linear. Devido ao efeito dos rendimentos, a relação tem uma forma exponencial.

A Figura 1 apresenta a duração de fundos de diversos tamanhos iniciais (em termos de anos de despesas) para várias taxas de retorno. Ela foi construída utilizando a fórmula 4, variando j e P_0. Notamos que, quanto maior a

[5] Até o momento não levamos em consideração a inflação, e fazer projeções mantendo o gasto anual fixo levará a resultados inadequados. Poderíamos desenvolver fórmulas levando em consideração a inflação, porém é mais simples utilizar diretamente a **taxa de retorno real** nas fórmulas que já temos. Por exemplo, se conseguimos um retorno de nominal de 10%, e a inflação for de 6%, podemos utilizar $j = 4\%$ nas fórmulas.

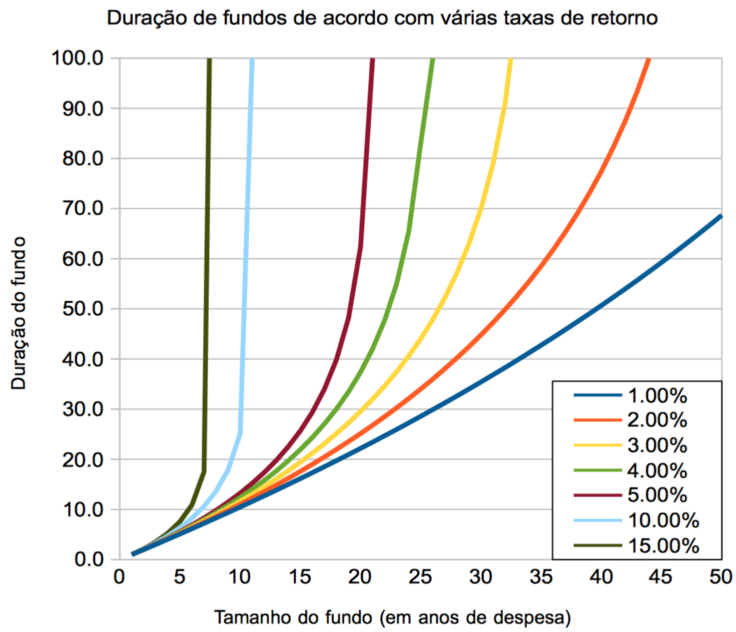

Figura 1: Duração de fundos com tamanhos iniciais diferentes para várias taxas de retorno

taxa de juros, mais rápido é o crescimento da duração do fundo. Para taxas de retorno real razoáveis (entre 3% e 5%), notamos que um fundo entre 25 e 30 vezes a despesa anual irá durar um tempo mais do que suficiente (acima de 60 anos).

Da mesma maneira que vimos que um fundo equivalente a 30 vezes a despesa anual irá durar mais do que 30 anos, devido ao efeito do retorno sobre o investimento, é intuitivo que sejam necessários menos de 30 anos para acumular este fundo. Podemos mostrar que, com uma taxa de poupança de $r\%$, o tempo necessário para acumular um fundo de um tamanho arbitrário P_0/p (em número de anos de despesas) é dado por[6]:

$$N = \frac{\log\left(\frac{P_0}{p}\frac{(1-r)}{r}j + 1\right)}{\log(1+j)} \tag{5}$$

Um fundo equivalente a 25 anos de despesas, sob circunstâncias relativamente normais, é suficiente para sobreviver indefinidamente, como podemos

[6]Ver o Apêndice para a derivação da fórmula.

ver na Figura 1. Assumindo uma taxa de retorno real $j = 5\%$ e uma taxa de poupança de 10% e aplicando a fórmula 5, vemos que são necessários aproximadamente 51 anos de trabalho para acumular este montante. Por outro lado, se a taxa de poupança aumentar de 10% para 15%, seriam necessários 43 anos, uma redução de 8 anos. Ou seja, com uma redução de apenas 5% nas despesas (facilmente alcançável por qualquer um), o período de acumulação necessário diminuiu em 16%! Isto ressalta um fato importantíssimo:

A redução de gastos é um meio muito mais eficiente do que o aumento da renda para alcançar a IF.

A Figura 2 apresenta o número de anos de trabalho necessários para acumular um fundo equivalente a 25 anos de despesas para várias taxas de retorno sobre os investimentos. As taxas de poupança indicadas em planos de previdência são geralmente da ordem de 10% ou menos, o que implica em um período de contribuição da ordem de 40 a 50 anos, a não ser que seja possível atingir taxas de retorno acima de 10%. Como podemos ver pelo gráfico, a maneira mais eficiente de atingir a IF mais cedo é reduzir os gastos como proporção da renda. Por exemplo, para se tornar independente em 10 anos, basta ter um padrão de vida compatível com gastos da ordem de 30% a 35% da renda.

4.1 Taxas de retorno e opções de investimento

A discussão apresentada até agora é sem dúvida simplista, pois considera taxas de retorno e inflação constantes. Na vida real, estes números variam constantemente e as taxas de retorno não são nem previsíveis, nem garantidas. É tentador colocar taxas de retorno altas nas equações, pois os resultados parecem mágicos: com uma taxa real de retorno de 15%, por exemplo, podemos nos tornar independentes em apenas 10 anos, economizando 50% da renda. Obviamente, uma taxa de retorno desta magnitude não é realista para a maioria das pessoas.

Que taxas de retorno podemos esperar na realidade? No Brasil, historicamente, as taxas de juros sempre foram muito altas, assim como a inflação. Vamos considerar o período entre janeiro de 1999 e outubro de 2013. A Figura 3 apresenta o valor de R$1 investido no início deste período em dois investimentos: o índice IBOVESPA, que corresponde a uma carteira das

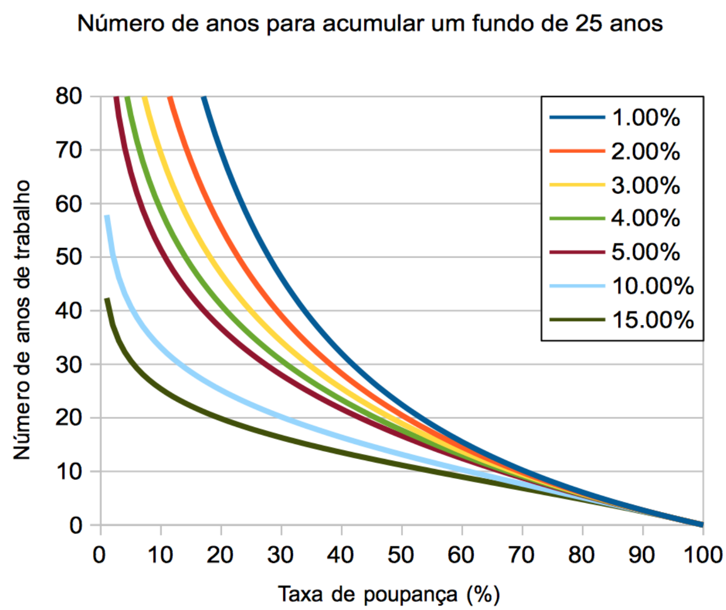

Figura 2: Número de anos de trabalho necessários para acumular um fundo de 25 anos

maiores ações negociadas em bolsa no Brasil, e o CDI, que pode ser pensado como um indicador do custo do dinheiro no curto prazo, ou uma taxa de juros livre de risco. Podemos notar que o investimento no mercado de ações no Brasil neste período, se medido através do IBOVESPA, foi um péssimo negócio comparado ao CDI, pois apresentou um retorno similar, porém com um risco muito alto.

Qual a taxa de retorno destes investimentos? Como mostra a Tabela 4, R\$1 investido em janeiro de 1999 teria se tornado, em outubro de 2013, R\$ 7,66 se tivesse sido investido no IBOVESPA, e R\$ 7,79 se tivesse sido investido no CDI. Isto equivale a taxas de retorno anualizadas de 14,8% (IBOVESPA) e 14,93% (CDI). A inflação anual durante o período, utilizando uma média entre diversos índices, foi de cerca de 7,73%. Isto resultaria em retornos reais da ordem de 7% ao ano. Considerando os custos de investir no mercado de ações ou em um fundo DI, assim como os impostos, este número pode se reduzir significativamente.

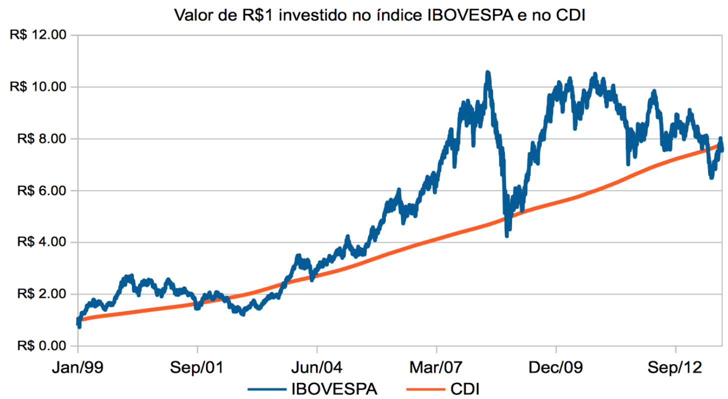

Figura 3: Valor de R$1 investido no IBOVESPA ou no CDI entre janeiro de 1999 e outubro de 2013

Tabela 4: Taxas de retorno anualizadas do IBOVESPA e CDI entre janeiro de 1999 e outubro de 2013

	IBOVESPA	CDI
Valor de R$1 investido em jan/1999	R$ 7,66	R$ 7,79
Taxa de retorno anualizada	14,80%	14,93%
Volatilidade	31,37%	0,31%
Inflação anualizada no período	7,73%	

Opções de investimento e alocações Existem inúmeras opções de investimento disponíveis no mercado brasileiro: fundos de renda fixa, fundos de ações, fundos imobiliários, ETFs, fundos de hedge e assim por diante. Além disso, existem outras alternativas como compra e venda de imóveis, investimento em ações individuais etc.

É importante levar em consideração que os produtos oferecidos pelo mercado financeiro possuem diferentes custos, que na maioria das vezes não se justificam. Um exemplo típico são os fundos de ações passivos, que seguem regras simples, como replicar o índice IBOVESPA. A taxa de administração destes fundos, muitas vezes, é da ordem de 2% ao ano ou mais. Isto significa que, independentemente do desempenho do mercado de ações, o investidor tem um custo anual de 2%. Por este motivo é preciso ficar muito atento às escolhas, e utilizar os mesmos critérios que utilizamos quando compramos qualquer produto. De fato, dado o alto custo dos fundos de investimento no Brasil, é justificável investir na educação financeira para se tornar o gestor da própria carteira de investimentos. Estratégias simples e mecânicas para construir carteiras de ações, que podem ser facilmente implantadas por investidores individuais e requerem manutenção mínima, superaram facilmente índices como o IBOVESPA[7].

A Figura 4 apresentou dois extremos: uma carteira com 100% do capital investido no mercado de ações (extremamente arriscado), ou 100% no CDI (extremamente seguro). Na prática, cada investidor deve estruturar uma carteira que reflita o seu perfil de risco, escolhendo alocações nas diversas classes de ativos e mantendo estas alocações ao longo do tempo. Para isto, é necessário rebalancear a carteira periodicamente. Por exemplo, suponha que um investidor com um patrimônio de R$500.000 decida por uma alocação de 60% em renda fixa, com os demais 40% investidos em ações. Para implementar esta estratégia, ele investe hoje R$300.000 em um fundo DI e R$200.000 em um fundo de ações. Imaginemos que, após 12 meses, o investimento no fundo de ações tenha rendido 25%, totalizando portanto R$250.000, enquanto o fundo DI rendeu 8%, totalizando R$324.000. O patrimônio total é então de R$574.000. Para continuar a seguir sua estratégia, o investidor precisará rebalancear sua carteira para manter as alocações desejadas. Para isto, ele precisará resgatar parte do dinheiro do fundo de ações e aplicar este dinheiro no fundo DI. Ele ficará com R$344.400 no fundo DI, e R$229.600 no fundo de ações.

O conceito de rebalanceamento da carteira é extremamente importante. Ele garante que manteremos nossa estratégia de investimento alinhada com nosso perfil desejado de risco ao longo do tempo. Além disso, o processo garante que, após um período em que uma determinada classe de ativos tenha um rendimento muito forte, este rendimento seja realizado, ou transferido para outras classes. O conceito de rebalanceamento se aplica não só ao período de acumulação, mas também ao período em que o investidor utilizará os rendimentos da sua carteira para financiar o seu custo de vida, ou seja, o período de independência financeira. Neste período, o investidor terá de gerenciar os investimentos adequadamente, retirando dinheiro de maneira a manter a alocação desejada.

---

[7] Ver por exemplo a estratégia de investir em uma carteira de ações de baixa volatilidade, estudada por Rubesam & Beltrame (2013).

4.2 Simulações mais realistas

As fórmulas que utilizamos até o momento partem de simplificações da realidade, na qual os fluxos de caixa são conhecidos no futuro e ocorrem de maneira sistemática. Podemos pensar nestas fórmulas como o resultado de um modelo matemático e determinístico: dadas as mesmas variáveis de entrada, o modelo entregará sempre os mesmos resultados. Mesmo utilizando taxas de retorno e inflação mais realistas, baseadas em dados históricos, pode-se criticar esta abordagem por ser simplista demais. Sabemos que, na vida real, eventos inesperados poderão ocorrer, impactando nosso patrimônio ou nosso custo de vida, tanto para melhor quanto para pior. Duas alternativas podem ser utilizadas para mitigar o risco de nosso modelo não ser realista o suficiente:

- Podemos tornar o modelo mais complexo, por exemplo introduzindo novas variáveis ou algum nível de aleatoriedade, para refletir melhor a realidade; e

- Podemos utilizar o modelo de forma mais conservadora, embutindo em nossas estimativas uma **margem de segurança**.

Se tentarmos introduzir muitas variáveis no nosso modelo, ele se torna rapidamente intratável do ponto de vista matemático, no sentido de que não será mais possível obter fórmulas fechadas para as variáveis de interesse, como fizemos anteriormente.

Felizmente, com uma simples planilha (ou escrevendo um programa de computador), podemos facilmente realizar simulações, incluindo variáveis para descrever detalhes específicos da nossa situação financeira, como por exemplo renda de imóveis alugados, fundos de previdência com contribuições feitas pelo empregador, acumulação de FGTS, aumentos esperados no salário durante o período de contribuição e assim por diante. Além disso, o uso de simulações permite que simulemos diversas possibilidades ou "caminhos" para a evolução futura das variáveis econômicas, como o desempenho do mercado de ações ou a inflação. Uma maneira simples de se fazer isto é considerando diversos períodos diferentes no passado para construir nossas estimativas de retorno e inflação. Uma maneira mais sofisticada consiste em construir um modelo estocástico para a evolução destas variáveis. Isto permite que simulemos milhares de possibilidades para os caminhos das variáveis no futuro[8], o que por sua vez permite que estimemos a probabilidade de sucesso do nosso plano de IF.

É importante lembrar que, mesmo que tornemos nossas simulações mais complexas e realistas, existe sempre a chance de ocorrer um evento que não levamos em consideração e cujo efeito seja significante. A melhor maneira de se previnir contra este tipo de situação é utilizando uma margem de segurança nos cálculos. Se, por exemplo, acreditamos que um fundo de 25 anos seja suficiente para cobrir nossas despesas, podemos nos programar para acumular um fundo de 30 anos. Alternativamente, podemos ser mais ou menos conservadores na taxa de retirada que pretendemos fazer no futuro. Vimos que um fundo equivalente a 25 vezes as despesas anuais é suficiente, sob certas condições, para viver indefinidamente. Isto equivale a uma taxa de retirada anual de 4% (1/25). Uma outra maneira de ser conservador é se programar para retirar menos do que 4%.

4.3 Divagações não-matemáticas

Para muitos, o "sacrifício" de poupar uma porcentagem alta da renda (por exemplo, 65%) pode parecer extremo. Vários fatores contribuem para esta percepção. Primeiro, existe sempre a perspectiva de que a renda aumentará no futuro, logo será mais eficiente poupar no futuro do que no presente. Este argumento é falacioso, pois vimos que o impacto dos retornos ao longo dos tempos torna mais eficiente poupar o quanto antes. Além disto, o sacrifício de poupar mais hoje só pode ser evitado por outro sacrifício, discutivelmente maior, de trabalhar por um tempo mais longo no futuro.

O segundo fator diz respeito ao consumismo prevalente nas sociedades ocidentais modernas, em particular à percepção de que a felicidade e o sucesso estão intrinsicamente ligados ao consumo de bens materiais: quanto mais dinheiro você ganha, mais objetos você pode comprar, maior o seu nível de sucesso na vida e, presumivelmente, sua felicidade. Levado ao extremo, este tipo de raciocínio (ou falta dele) leva a absurdos como endividar-se para demonstrar um certo "padrão de vida".

É importante entender que, ao adotar este sistema de valores, torna-se necessário ganhar cada vez mais dinheiro para consumir mais, o que conduz

[8]Esta técnica é chamada de simulação de Monte Carlo, ver `http://en.wikipedia.org/wiki/Monte_Carlo_method`.

naturalmente ao estilo de vida que se tornou o padrão no mundo ocidental: trabalhar 40 horas por semana, durante 40 a 50 anos. Isto torna escasso o tempo livre, promovendo por sua vez o aumento de gastos que gerem conveniência ou gratificação instantânea. É um círculo vicioso que gera a sensação de não se estar progredindo, a chamada *corrida dos ratos*: apesar de trabalhar cada vez mais, muitos tem a sensação de que conseguem apenas pagar as contas e que não saem do lugar.

Apesar da prevalência da percepção de que é preciso consumir mais para ser feliz, estudos sobre felicidade demonstram consistentemente que o nível de felicidade tem pouca relação com o consumo. É óbvio que, se considerarmos alguém que está privado das coisas mais básicas, um aumento no consumo pode trazer benefícios consideráveis na qualidade de vida. Porém, após um certo patamar no qual as necessidades básicas estão atendidas, um consumo maior tem pouca ou nenhuma relação com a felicidade. É claro que comprar certas coisas é prazeroso, pelo menos no curto prazo. Porém, após comprar um objeto que desejamos muito, geralmente nos acostumamos rapidamente à realidade de possuir este objeto, e nosso nível de felicidade ou satisfação retorna para os níveis normais. Este fenômeno é conhecido como *adaptação hedônica*[9] e é válido tanto para eventos positivos como negativos. Nosso cérebro é programado para manter um nível relativamente estável de felicidade. Logo, buscar o aumento da felicidade através do aumento do consumo é uma proposição que parece biologicamente fadada ao fracasso.

Apesar de este padrão de consumo ser mais ou menos a norma hoje em dia, vale lembrar que ele é uma escolha, e que um estilo de vida diferente não só é possível como possui vantagens. Em particular, em uma sociedade de consumo, na qual existe um incentivo ao consumo constante e à substituição dos bens antes do fim de sua vida útil, as opções para quem tem um padrão de vida mais frugal são amplas e econômicas, pois existe um excesso de bens de segunda mão em perfeito estado de funcionamento, que são substituídos por versões novas e mais "desejáveis".

Críticas aos Argumentos de IF

Existem diversos níveis de consumo e poupança e a situação financeira de cada um é diferente. Poupar uma alta porcentagem da renda pode não ser viável sob certas condições. Porém, vimos que mesmo esforços relativamente

[9] Ver `http://en.wikipedia.org/wiki/Hedonic_treadmill`

baixos, como reduzir em 5% os gastos, podem ter efeitos dramáticos em termos de IF.

Os principais argumentos comumente utilizados para refutar os conceitos de IF são:

- "Minha situação de vida não permite poupar x% da minha renda".
- "Eu prefiro curtir a vida agora. Não vou me privar dos meus prazeres".
- "Eu trabalho muito e mereço ter uma vida confortável".

Independentemente da situação em que alguém se encontre, é preciso constantemente tomar decisões financeiras. Por exemplo, se não é possível poupar devido à existência de dívidas, podemos nos planejar para primeiro eliminar as dívidas, e em seguida começar a poupar.

Com relação aos demais argumentos, é importante levar em consideração que um consumo maior não necessariamente leva a uma felicidade maior, como mencionado acima. Além disso, um consumo maior no presente significa um tempo maior de trabalho no futuro, tempo este que poderia ser desfrutado com a família, participando ativamente da educação dos filhos, ou fazendo algo de que se goste realmente, independentemente da remuneração. Vale realmente a pena, por exemplo, passar 8 anos a mais trabalhando para financiar gastos que podem ser facilmente evitados, sem impacto relevante em nossa qualidade de vida? Mesmo quem tem a sorte de trabalhar com algo de que realmente gosta pode se beneficiar desta estratégia, pois poderá fazer o que quer, independentemente da remuneração, e isto é essencialmente o conceito de IF mencionado no início.

A discussão acima também permite concluir que, salvo raras exceções, **dívida = escravidão**. Financiar bens de consumo (carros, eletrônicos etc) é uma das piores decisões que se pode tomar na vida, em termos de IF. Não só deixamos de poupar dinheiro que nos renderia juros: **estamos vendendo, a um preço desvantajoso, nosso tempo livre no futuro**.

5 Conclusões

O objetivo deste artigo é demonstrar os princípios matemáticos da independência financeira. Dentre os fatores que influenciam o alcance da independência financeira, o mais importante é a taxa de poupança, ou seja, a proporção da nossa renda que não é necessária para pagar nossos gastos. A influência da taxa de poupança no tempo necessário para se tornar independente financeiramente (ou no tamanho do fundo acumulado) não é linear, mas sim exponencial. Isto implica que um aumento na taxa de poupança levará, em geral, a uma diminuição proporcionalmente maior no tempo necessário para alcançar a independência financeira.

Os cálculos apresentados mostram que um fundo equivalente a algo entre 25 e 30 anos de despesas é suficiente para alguém se tornar financeiramente independente, considerando taxas de retorno historicamente plausíveis. Isto equivale a uma taxa de retirada anual de 4% do fundo acumulado. O tempo de trabalho necessário para acumular um fundo deste tamanho depende de diversas variáveis, porém considerando uma taxa de retorno real da ordem de 4%, ele pode ser da ordem de 10 anos, se os gastos totais forem da ordem de 35% da renda.

As fórmulas apresentadas para mensurar a independência financeira são baseadas em suposições assumidamente simplistas e sua utilidade é fornecer uma primeira estimativa das variáveis de interesse. Uma abordagem mais realista pode ser implementada através de simulações. É importante utilizar uma margem de segurança, para levar em consideração a ocorrência de adversidades no futuro.

A Apêndice

A.1 Derivação da fórmula 2

O saldo no primeiro mês é $P_1 = A$. No segundo mês, temos:

$$P_2 = A(1+j) + A$$

No final do mês 3, temos

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2(1+j) + A \\ &= (A(1+j) + A)(1+j) + A \\ &= A(1+j)^2 + A(1+j) + A \end{aligned}$$

Seguindo este raciocínio, temos que após N meses, o saldo é

$$\begin{aligned} P_N &= A\left[(1+j)^{N-1} + (1+j)^{N-2} + \cdots + (1+j) + 1\right] \\ &= A \times S, \end{aligned} \tag{6}$$

onde $S = (1+j)^{N-1} + (1+j)^{N-2} + \cdots + (1+j) + 1$. Para calcular o valor de S, podemos usar o seguinte "truque". Vamos multiplicar S por $(1+j)$, o que resulta em:

$$S(1+j) = S + Sj = (1+j)^N + (1+j)^{N-1} + \cdots + (1+j) \tag{7}$$

Fazendo a subtração 7 - 6, temos:

$$\begin{aligned} S + Sj - S = (1+j)^N & + (1+j)^{N-1} + \cdots + (1+j) \\ & - (1+j)^{N-1} - \cdots - (1+j) - 1 \\ \Rightarrow S = \frac{(1+j)^N - 1}{j} & \end{aligned}$$

Note que vários dos termos se cancelam na soma do lado direito da equação (soma telescópica). Cancelando os termos e rearranjando a fórmula, chegamos ao resultado acima. Logo temos que

$$P_N = A \times S = A \times \frac{(1+j)^N - 1}{j}$$

Utilizando exatamente o mesmo raciocínio, podemos derivar uma versão alternativa desta fórmula para um saldo inicial qualquer P_0. Esta fórmula é dada por

$$P_N = \frac{(P_0 \times j)(1+j)^{N-1} - A}{j}$$

A.2 Derivação da fórmula 3

Começamos com um fundo de tamanho P_0, investido a uma taxa de retorno j, e retiramos no início de cada período um valor p. Após o final do primeiro período, o valor restante $(P_0 - p)$ terá rendido a uma taxa j:

$$P_1 = (P_0 - p)(1+j) = P_0(1+j) - p(1+j)$$

Fazemos mais uma retirada de p, e investimos o restante $(P_1 - p)$ a taxa j, logo, no final do segundo período teremos:

$$\begin{aligned} P_2 &= (P_1 - p)(1+j) = (P_0(1+j) - p(1+j))(1+j) \\ &= P_0(1+j)^2 - p(1+j)^2 - p(1+j) \end{aligned}$$

Seguindo este raciocínio, chegamos a conclusão de que o valor após N períodos será dado por

$$\begin{aligned} P_N &= P_0(1+j)^N - p\left[(1+j)^N + (1+j)^{N-1} + \cdots + (1+j)\right] \\ &= P_0(1+j)^N - pS \end{aligned}$$

onde $S = (1+j)^N + (1+j)^{N-1} + \cdots + (1+j)$.

Para obter o valor de S, notemos que

$$\begin{aligned} S+1 &= (1+j)^N + (1+j)^{N-1} + \cdots + (1+j) + 1 \\ \Rightarrow (S+1)(1+j) &= (1+j)^{N+1} + (1+j)^N + \cdots + (1+j) + (1+j) \end{aligned}$$

Fazendo a subtração $(S+1)(1+j)-S$, os termos se cancelam e chegamos a:

$$S = \frac{(1+j)^{N+1} - (1+j)}{j}$$

Usando a relação $P_0(1+j)^N - pS$, chegamos ao resultado.

A.3 Derivação da fórmula 5

Começamos supondo uma taxa de poupança de $r\%$, o que implica em gastos de $(1-r)\%$. Logo, a cada período trabalhado, acumulamos o suficiente para financiar um período de duração $r/(1-r)$ sem trabalhar[10]. Vamos supor que começamos o período de acumulação do zero e vamos trabalhar por M períodos, depositando $r/(1-r)$ a cada período. Qual será o valor acumulado em termos de períodos equivalente de despesa? O primeiro depósito terá rendido juros j durante M períodos; o segundo depósito, durante $M-1$ períodos, e assim por diante, até o último depósito, que não terá rendimento. Logo, daqui a M períodos, o valor total dos investimentos será, em número de períodos de despesa:

$$\frac{r}{1-r}(1+j)^M + \frac{r}{1-r}(1+j)^{M-1} + \cdots + \frac{r}{1-r}(1+j) + \frac{r}{1-r}$$

[10]Por exemplo, se $r = 15\%$, temos $r/(1-r) = 0.1764$. Se a renda mensal for de R\$10.000, a cada período trabalhado são consumidos R\$8.500 e economizados R\$1.500, os quais equivalem a 17,64% da despesa mensal. Esta é a lógica inversa da Tabela 2.

A expressão acima se reduz, pelo mesmo argumento utilizado anteriormente, a

$$\frac{r}{1-r}\left[\frac{(1+j)^M-1}{j}\right]$$

Se quisermos acumular o suficiente para financiar um certo número de períodos sem trabalhar, temos que igualar a expressão acima a este número. Se P_0 for o valor acumulado após M períodos, e p for o valor da retirada no período de IF, então temos que resolver a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
\frac{P_0}{p} &= \frac{r}{1-r}\left[\frac{(1+j)^M-1}{j}\right] \\
&\Rightarrow \frac{(1+j)^M-1}{j} = \frac{P_0}{p}\frac{1-r}{r} \\
&\Rightarrow (1+j)^M = \frac{P_0}{p}\frac{1-r}{r}j+1 \\
&\Rightarrow M = \frac{\log\left(\frac{P_0}{p}\frac{1-r}{r}j+1\right)}{\log(1+j)}
\end{aligned}$$

Isolando M chegamos ao resultado desejado.

Referências

Fisker, Jacob Lund. 2010. *Early Retirement Extreme.*

Rubesam, A., & Beltrame, A. L. 2013. Carteiras de Variância Mínima no Brasil. *Revista Brasileira de Finanças*, **11**(1).